GARA DI MATEMATICA ON-LINE (27/1/2025)

1. DUE + DUE - [200]
Se applichiamo la proprietà commutativa e poi la proprietà associativa, possiamo effettuare il calcolo nel modo seguente:
$n = 200+199-198-197+196+195-194...+4+3-2-1=$
$(200-198)+(199-197)+(196-194)+(195-193)+...+(4-2)+(3-1)=$
$100 \cdot 2 = 200$

2. SALDI [128]
Se x è il prezzo delle scarpe prima dello sconto, allora $\frac{75}{100}x = 96$ € e quindi $x = \frac{100}{75} \cdot 96$ € $= 128$ €

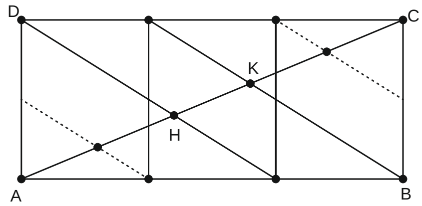
3. QUESTIONI DI ETÀ [21]
Sia x l'età di Pietro. Se l'età della mamma è il doppio di quella di Pietro ($2x$), la loro differenza è esattamente x l'età di Pietro. Tra x anni, l'età della mamma sarà $3x$, pari a 63 anni. Pietro ha $x = \frac{63}{3} = 21$ anni.

4. MCM e MCD [48]
Siccome $180 \cdot n = MCD \cdot mcm$ avremo che $n = \frac{MCD \cdot mcm}{180} = \frac{12 \cdot 720}{180} = 48$.

5. SOLO 1 E 3 [720]
Abbiamo i seguenti casi:
$13XX$ da completare in $8 \cdot 8$ modi
$1X3X$ da completare in $8 \cdot 8$ modi
$1XX3$ da completare in $8 \cdot 8$ modi
$X13X$ da completare in $7 \cdot 8$ modi in quanto lo "0" non può essere usato come prima cifra
$X1X3$ da completare in $7 \cdot 8$ modi
$XX13$ da completare in $7 \cdot 8$ modi.
Il tutto moltiplicato per 2 in quanto 1 e 3 possono essere scambiati di posto.
In totale $2 \cdot (64 \cdot 3 + 56 \cdot 3) = 720$.

6. DUE SOLI PRIMI [4054]
Se $n = p \cdot q$, allora i suoi divisori (diversi da n) sono solo 1, p e q. Siccome sappiamo che $1 + p + q = 2030$, allora $p + q = 2029$. La somma di due numeri primi è dispari, solo se uno dei due numeri è 2 e quindi $p = 2$ e $q = 2027$ (che è effettivamente primo).
$n = 2 \cdot 2027 = 4054$.

7. TRE PER UNO [13]
Se tracciamo le ulteriori parallele passanti per i vertici dei rettangoli, ci accorgiamo (per il Teorema di Talete) che la diagonale è divisa in 5 parti uguali..
Siccome $AC = \sqrt{(20 \cdot 3)^2 + 25^2} = 65 \text{ cm}$, $HK = \frac{AC}{5} = \frac{65}{5} = 13 \text{ cm}$



8. STRANI DESIDERI [10]
Un numero ha 3 divisori solamente se è il quadrato di un numero primo. Infatti $n = p^2$ è divisibile per 1, p e per n. Siccome $\sqrt{900} = 30$, dobbiamo contare quanti sono i numeri primi minori di 30. Elenchiamoli: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29. In totale sono 10.

9. PEDALANDO IN BICICLETTA [9375]

La ruota anteriore ha una lunghezza di $2\pi \cdot 30 \text{ cm}$ e quindi ha percorso $10000 \cdot 2\pi \cdot 30 \text{ cm}$.
La ruota posteriore, analogamente ha fatto $x \cdot 2\pi \cdot 32 \text{ cm}$ dove x sono i giri che ha fatto. Siccome le due distanze devono essere uguali, abbiamo $x \cdot \cancel{2\pi} \cdot 32 = 10000 \cdot \cancel{2\pi} \cdot 30$ e quindi $x = \dfrac{10000 \cdot 30}{32} = 9375$.

10. NUMERI IN TABELLA [11]

		17
x	15	16

Osserviamo che l'ultima riga ($x+15+16$) e la diagonale con la x ($x+?+17$) devono dare la stessa somma e quindi nella casella centrale ci dobbiamo mettere un 14.

		17
	14	
x	15	16

Per la stessa ragione nella prima casella, guardando la colonna centrale e la prima riga ci deve andare un 12.

12		17
	14	
x	15	16

A questo punto $x+14+15 = 12+14+16$ da cui segue che $x = 11$.
Per completezza riportiamo la griglia intera:

12	13	17
19	14	9
11	15	16

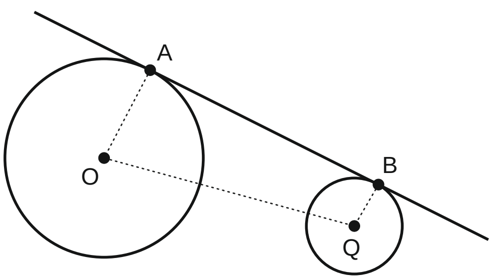
11. LA PASSWORD [3750]

Andrea può scegliere le vocali in $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ modi diversi, mentre le maiuscole/minuscole anagrammando la stringa $mmMM$ in 6 modi diversi.
Le password saranno $625 \cdot 6 = 3750$. (pochine… direi)

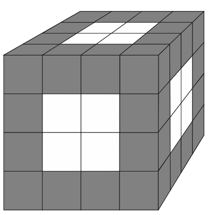
12. DISTANTI… [26]

Il problema è equivalente a conoscere l'altezza e le due basi di un trapezio per calcolarne il lato obliquo.

$$OQ = \sqrt{(16-6)^2 + 24^2} = 26 \text{ cm}$$



13. BIANCO-NERO [75]



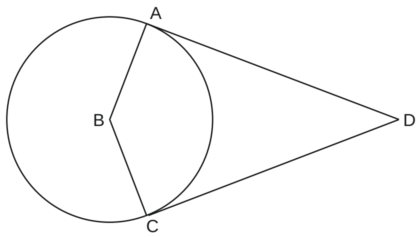
Con 32 cubi neri è possibile fare l'intero bordo esterno del cubo $4 \times 4 \times 4$ utilizzando i cubetti bianchi solo per completare le facce e la parte interna.

La percentuale cercata è $\dfrac{12 \cdot 6}{16 \cdot 6} \cdot 100 = 75\%$.

14. STRETTE DI MANO [45]

Se tutti dessero la mano a tutti gli altri, avremmo $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ strette di mano. Ma così facendo abbiam o contato le strette di mano tra sole donne, che sono $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ che dobbiamo togliere. Ci saranno in tutto $66 - 21 = 45$ strette dai mano.

15. L'AQUILONE [60]



Rappresentiamo il tutto come nella figura a lato. Osserviamo che il quadrilatero $ABCD$ altro non è che la somma di due triangoli rettangoli di cateto $5\ \text{cm}$ e ipotenusa $13\ \text{cm}$. L'altro cateto misura $12\ \text{cm}$ per la nota terna pitagorica $(5-12-13)$.
L'area del quadrilatero è il doppio dell'area di uno dei triangoli e quindi $A_{ABCD} = 12 \cdot 5 = 60\ \text{cm}^2$.

16. UN GIOCO [172]
Se i numeri fossero solo 3, x, y e z, indipendentemente dall'ordine, il gioco finirebbe con il numero $x+y+z-2-2 = x+y+z-2\cdot 2$.

Con i numeri da 1 a 20 andrà a finire con $(1+2+3+...+20)-19\cdot 2 = \frac{20\cdot 21}{2} - 38 = 210-38 = 172$.

17. TUTTE ROSSE [41=9/32]
Calcoliamo la probabilità che NON succeda, cioè che in tre pesate successive non escano mai le due palline blu.
Abbiamo i seguenti casi:

$R-R-R$: $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{8}{64}$

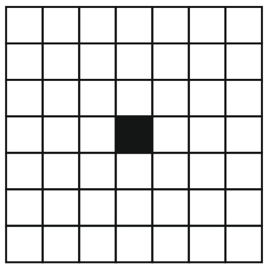
$B-R-R$: $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{18}{64}$

$R-B-R$: $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{12}{64}$

$R-R-B$: $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{8}{64}$

La probabilità cercata è quindi $P(\text{tutte rosse}) = 1 - \frac{8}{64} - \frac{18}{64} - \frac{12}{64} - \frac{8}{64} = \frac{18}{64} = \frac{9}{32}$.

18. QUADRATO ESCLUSO [96]



I quadrati di lato 1 sono in tutto 7^2, quelli che contengono il quadrato nero è 1 solo.
I quadrati di lato 2 sono in tutto 6^2, quelli che contengono il quadrato nero sono 2^2.
I quadrati di lato 3 sono in tutto 5^2, quelli che contengono il quadrato nero sono 3^2.
Tutti gli altri dovranno contenere necessariamente il quadratino nero.
In totale abbiamo $7^2 - 1 + 6^2 - 2^2 + 5^2 - 3^2 = 96$.

19. UN GIOCO DI LOGICA [2131]
Sintetizziamo le informazioni:
(1): $2 \leftarrow 3$
(2): $Q \leftarrow J$
(3): $K \rightarrow 1$
(4): $J \neq 1$
Ma allora nella scatola 1 non c'è né il J né il K, quindi c'è la Q.
Per le informazioni date dalla (2)e dalla (3) deve essere:

	1	
K	Q	J

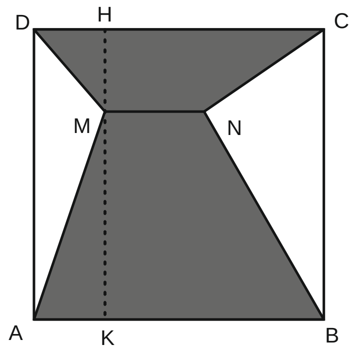
E quindi usando anche la (1)

2	1	3
K	Q	J

La risposta richiesta è 2131.

20. I DUE TRAPEZI [60]

Tracciamo le altezze MH e MK dei due trapezi, ed osserviamo che la loro somma corrisponde al lato del quadrato.



Se l'area della parte bianca è $\frac{2}{5}$, allora l'area dei due trapezi è i $\frac{3}{5}$ dell'area del quadrato.

Detta $MN = x$ abbiamo che:

$A_{ABNM} + A_{MNCD} = \frac{3}{5} A_{ABCD}$ che possiamo anche scrivere:

$\frac{(l+x)\cdot MK}{2} + \frac{(l+x)\cdot MH}{2} = \frac{3}{5} l^2$ cioè

$\frac{(l+x)\cdot(MK+MH)}{2} = \frac{3}{5} l^2$ che diventa

$\frac{(l+x)\cdot l}{2} = \frac{3}{5} l^2$ e quindi

$l + x = \frac{6}{5} l$ ed infine

$x = \frac{1}{5} l$.

Siccome il lato del quadrato è $l = \frac{1200}{4} = 300 \text{ cm}$, $x = \frac{300}{5} = 60 \text{ cm}$.